**Векторная алгебра**

**Справочные формулы**

**Обозначения**

***вектор***: в печати , в письме или

***модуль вектора***: ,

***проекция вектора***:

***составляющая-проекция на ось x:,*** в письме или

***составляющая-проекция на плоскость xy:,*** в письме или

**Сложение**

***Коммутативность:***

***Ассоциативность:***

**Умножение на скаляр**

***Коммутативность:***

***Ассоциативность:***

***Дистрибутивность:***

**Координатное представление**

**Скалярное произведение**

***Коммутативность:***

***Дистрибутивность:***

**Векторное произведение**

***Некоммутативность:***

***Матричное представление:***

*c=* *А=*  *b=*

**Смешанное произведение**

***Круговая перестановка:***

***Представление через определитель***

**Двойное векторное произведение**

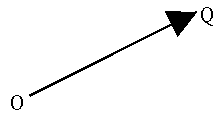
***Формула Лагранжа (****бац минус цаб):*

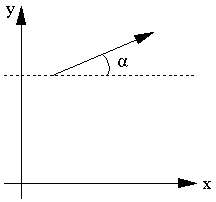
**Пояснения**

**Понятие вектора и его обозначения**

Многие физические понятия такие, как скорость и ускорение точки, сила, приложенная к точке, электрические и магнитные поля и многие другие характеризуются как численным значением, так и направлением. Такие понятия называются ***векторами***. Для численного описания вектора достаточно 3х чисел.

Многие другие величины, рассматриваемые в естественных науках и математике, имеют более сложную структуру. Так, для описания деформации упругого тела в точке необходимо уже 32 = 9 чисел, а для полной характеристики упругих свойств анизотропного тела требуется 34 = 81 число. Соответствующие понятия называют ***тензорами***, а показатель степени 3-ки (размерность координатного пространства) называют ***рангом тензора***. В общей классификации векторы - это тензоры 1-го ранга (31 = 3 числа), а ***скаляры*** - тензоры ранга 0 (30 = 1 число).

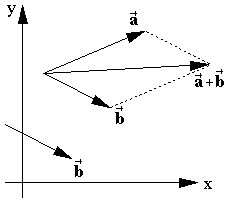
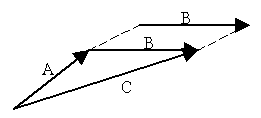
Графически вектор изображается направленным отрезком (стрелкой), показывающим направление вектора, а длина отрезка дает его ***величину (длину, модуль, абсолютное значение)***. В векторе важны две его точки: ***начала вектора*** О и ***конца вектора*** Q. Начало вектора О называют ***точкой приложения вектора***. Этот вектор ***можно обозначить***или просто , а величину вектора - или **||**.

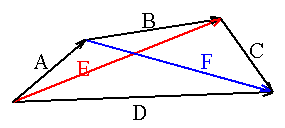
Традиционно векторы помечают полужирным шрифтом или стрелкой (часто черточкой) над символом вектора. Вообще, чем проще обозначения, тем лучше, тем легче выписывать формулы. Мы будем пользоваться разными обозначениями для векторов и их величин. Недоразумения не возникнет, поскольку из контекста всегда ясно, о чем именно идет речь.

***Направление вектора*** можно задать, например, углом 𝛼 как на этом рисунке. Это ***плоская*** (2-хмерная, 2D) ***прямоугольная декартова система координат***. Договорились ***угол наклона*** отсчитывать от оси абсцисс к вектору против часовой стрелки. Направление отсчета угла играет важную роль.

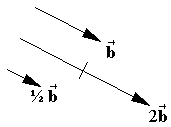
Для построения алгебры векторов потребуется такое понятие как ***нулевой вектор*** или ***нуль-вектор***. Нуль-вектор **0** не имеет длины и его направление не определено, фактически это число 0.  
  
**Сложение и вычитание векторов**

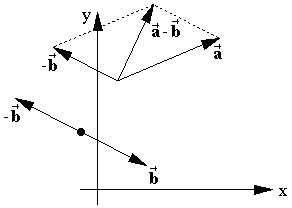
Сначала рассмотрим графический метод.  
**Сложение:**

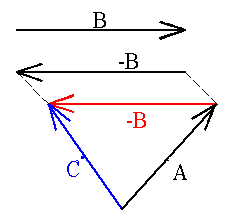
Складываемые векторы могут быть расположены произвольным образом друг относительно друга. Для графического сложения векторов сначала нужно совместить начала обоих векторов без изменения их направления. Это всегда можно сделать параллельным переносом одного из векторов или обоих векторов. На этом рисунке вектор **b** параллельно перенесен таким образом, чтобы совместились начала обоих векторов. Теперь строится параллелограм на векторах **a** и **b** как на образующих. Та диагональ параллелограма, которая проходит через начало складываемых векторов, даст вектор суммы векторов . Векторы складываются (и вычитаются, как мы убедимся в этом ниже) по "правилу параллелограма".   
Можно поступить иначе. На этом рисунке вектор **В** сначала параллельно смещен таким образом, чтобы его начало совместилось с концом вектора **А**. Результирующий вектор **С** = **А** + **В** соединяет начало вектора **А** и конец вектора **В**. Оба графических построения дают, очевидно, один и тот же результат.

Операция сложения векторов коммутативна (перестановочна): **A + B = B + A**.    
Выполняется также ассоциативный закон:**A + B + C** = **A + (B + C) = (A + B) + C** = **D.** Графическое доказательство ассоциативности сложения векторов видно из рисунка: результирующий вектор **D** можно получить либо сложив вначале **(A + B)** = **Е**, а затем **Е + С =** **D**, либо сначала **(B + C) = F,** а затем **А + F = D.**

**Умножение вектора на скаляр**.

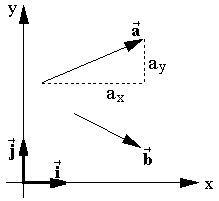
Скалярные величины характеризуются только одним числом и не имеют направления, они могут быть как положительными, так и отрицательными. При умножении вектора на положительное число величина вектора увеличивается или уменьшается на это число без изменения направления вектора. На этом рисунке вектор **b** умножен на 0.5 и на 2.

При умножении вектора на отрицательное число направление вектора меняется на противоположное, величина же вектора увеличивается или уменьшается на абсолютную величину числа. Умножим на -1 вектор **b** на рисунке. Получим вектор **-b**. Остается сложить вектор **-b** с вектором **a** по правилу параллелограма. Получим вектор разности **a - b**.

  
На этом рисунке вычитание векторов **А** - **В** = **С** делается несколько иначе: вектор **- В**, обратный вычитаемому вектору **В**, переносится параллельно в конец вектора **А**, затем суммируется с ним.

|  |
| --- |
| **Умножение векторов на произвольные числа m, n**   * коммутативно (перестановочно) : m**A = A**m, * ассоциативно : (m + n)**A** = m**A** + n**A**, * дистрибутивно (распределительно) : m**(A + B)** = m**A** + m**B** |

**Координатное представление векторов**

Рассмотрим теперь ***алгебраическое представление*** векторов. Его иначе называют координатным представлением.

Построим для вектора **a** на этом рисунке его проекции на оси системы координат. Для этого опускают перпендикуляры из точек начала и конца вектора на оси выбранной системы координат. Отрезки ax и ay , вырезаемые на осях, и есть проекции вектора. Это числа. Если вектор соответствует размерной физической величине, то эта размерность присваивается именно проекциям вектора. Например, проекции вектора скорости имеют (в системе единиц СИ) физическую размерность [м/с], как и модуль вектора скорости.

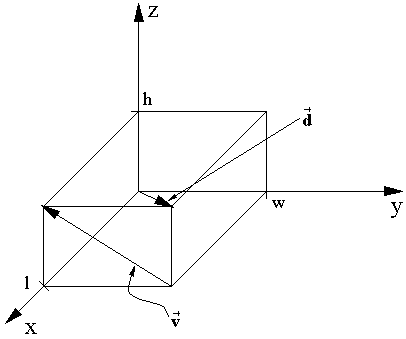
Для алгебраической записи вектора нужны ***единичные векторы (орты, базисные векторы)*** **i** и **j.** Они всегда направлены в сторону возрастания числовых значений осей системы координат и величина их всегда равна одной единице той величины, которая отложена на данной оси.

На этом рисунке орты изображены так, что их начало совпадает с точкой пересечения координатных осей. Эта точка не обязательно соответствует началу системы координат, под которым подразумевают точку совмещения нулей координатных осей и обычно обозначают буквой О. Такое изображение ортов не обязательно. Орты можно изображать в любом месте на координатной оси, более того - в любом месте рисунка, лишь бы они имели единичную величину и были ***сонаправлены*** с осями координат.

Задание ортов означает задание (выбор) системы координат. Ортам не присваивается физическая размерность, они безразмерны. Для 3-хмерной прямоугольной (ортогональной) декартовой системы координат потребуется также орт **k** вдоль оси **z.**   
Нередко орты обозначают одной и той же буквой **e** с нижним индексом (x, y, z или 1, 2, 3) для соответствующей координатной оси.

Из правила умножения вектора на скаляр и правила сложения векторов следует, что вектор **a** можно записать в алгебраическом виде: **a** = ax**i** + ay**j.** Слагаемые в этой сумме есть векторы. Их называют ***составляющими-проекциями***  исходного вектора **а,** т.е. вектор-проекция некоторого вектора на данную координатную ось есть произведение орта этой оси на соответствующую проекцию вектора. Полученное выражение называют "разложением вектора на его проекции" или "разложением вектора по ортам".

|  |
| --- |
| Рис. 12. Проекции вектора - скаляры, а вектор-проекции вектора - это векторы.Тогда из простых геометрических построений следуетчто для суммы векторов имеем:  **a** + **b** = (ax + bx)**i** + (ay + by)**j** + (az + bz)**k.**, |
|  |
| Таким образом, *каждая проекция суммы векторов равна сумме соответствующих проекций этих векторов*. |
| В выбранной системе координат разложение вектора на его проекции выполняется единственным возможным образом. В различных же системах координат, скажем, повернутых и/или сдвинутых одна относительно другой, один и тот же вектор, очевидно, разлагается по-разному (на различные проекции). Сам же вектор, естественно, остается неизменным - ни его длина, ни его направление не изменяются (инвариантны) при переходе от одной системы координат к другой. Вектор, как количественное описание какого-либо физического свойства - инвариантен по отношению к выбору системы координат.  Систему координат выбирают обычно таким образом, чтобы окончательные расчетные уравнения получились бы как можно более простыми. |
| Рис. 13. Вектора легко суммируются графически. Из графического суммирования хорошо видно, что проекции результирующего вектора Dx = Ax + Bx + Cx , Dy = Ay + By + Cy |

**Векторы в 3-хмерном пространстве**

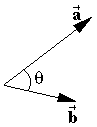
На этом рисунке показано разложение вектора **d** на его проекции l, w, h в декартовой 3D-системе координат. Это правая система координат: оси y, z лежат в плоскости экрана, а ось x направлена наружу от экрана. В левой системе координат ось x направлена внутрь экрана (или, например, ось z направлена вниз) при той же ориентации двух остальных осей. Отличить правую систему от левой можно по "правилу буравчика" (правило "правой руки"). Если не оговорено противное, в расчетах всегда используется правая система координат.

Алгебраическое разложение вектора **d** имеет вид:

**d** = dx**i** + dy**j** + dz**k .**

**Произведение векторов**

При перемножении векторов можно получить как скаляр, так и вектор. Поэтому в алгебре векторов вводятся два различных произведения векторов: скалярное (внутреннее) произведение, результатом которого является скаляр (число), и векторное произведение результатом которого является новый вектор.

**Скалярное произведение** двух векторов

Скалярные произведения обозначают также как **a.b** или **(a,b)** или просто **ab**,

Если угол между векторами 𝜃, то скалярное произведение определяется как

**a.b** = |**a**||**b**| cos 𝜃.

Из четности косинуса [cos(x) = cos (-x)] следует коммутативность (перестановочность) скалярного произведения: **a.b** = **b.a.**

Если **a.b** = 0, то либо |**a**| = 0, либо |**b**| = 0, либо 𝜃 = π/2. В последнем случае вектора взаимно перпендикулярны (ортогональны). Это уравнение есть условие ортогональности двух произвольных векторов.

|  |
| --- |
| Дадим сводку основных свойств скалярного произведения векторов: |
| http://www.emomi.com/download/vector_algebra/va.files/dot-product.gif |
| Равенство (1) констатирует коммутативность скалярного произведения, а равенства (2) и (3) указывают на его дистрибутивность. |

**Векторное произведение** векторов **a** и **b**

порождает новый вектор **c :**

**a x b = c .**

Величина вектора дается выражением

**|c|** = |**a**| |**b**| |sin 𝜃 |,

а направление **е** вектора **с** таково, что вектор **с** перпендикулярен к плоскости, образуемой перемножаемыми векторами, и тройка векторов **a, b, c** должна быть правой.

Из нечетности синуса [sin(x) = - sin(-x)] следует антикоммутация сомножителей в векторном произведении:

**a** x **b** = - **b** x **a .**

**Скалярное произведение векторов в координатном представлении**.

Разложим каждый из перемножаемых векторов на проекции, раскроем скобки и скомпонуем 9 слагаемых для наглядности в виде таблицы :

|  |
| --- |
| **a.b** = (ax**i** + ay**j** + az**k**) **.** (bx**i** + by**j** + bz**k**) =  [(ax bx)**i.i** + (ax by)**i.j** + (ax bz)**i.k**] +  + [(ay bx)**j.i** + (ay by)**j.j** + (ay bz)**j.k**] +  + [(az bx)**k.i** + (az by)**k.j** + (az bz)**k.k**]. |

Диагональные произведения ортов **i.i** = **j.j** = **k.k** = 1, поскольку угол между вектором и им самим равен нулю. Остальные шесть недиагональных (перекрестных) произведений ортов равны нулю, поскольку базис ортогональный. Окончательно

**a.b** = (ax bx) + (ay by) + (az bz)   
или словами - "*скалярное произведение векторов равно сумме попарных произведений их проекций*".

**Векторное произведение векторов в координатном представлении**.

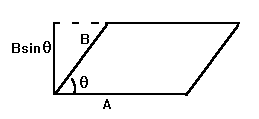
Имеем :

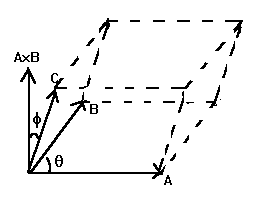
|  |
| --- |
| **a** x **b** = (ax**i** + ay**j** + az**k**) x (bx**i** + by**j** + bz**k**) =  = [(ax**i** x bx**i**) + (ax**i** x by**j**) + (ax**i** x bz**k**)] +  + [(ay**j** x bx**i**) + (ay**j** x by**j**) + (ay**j** x bz**k**)] +  + [(az**k** x bx**i**) + (az**k** x by**j**) + (az**k** x bz**k**)]. |

Поскольку sin 𝜃 = 0 для 𝜃 = 0, то диагональные произведения ортов **i** x **i** = **j** x **j** = **k** x **k** = 0, а недиагональные произведения **i x j** **=k , i** **x** **k = - j , j x k = i** и так далее в соответствии с "правилом правой руки".   
  
Для определения перекрестных произведений удобно пользоваться мнемонической схемой в виде круговой диаграммы. Если в паре перемножаемых векторов движение от первого (левого) сомножителя ко второму (правому) идет по часовой стрелке, то результирующий вектор (третий) берется со знаком "плюс", если против часовой стрелки, то со знаком "минус", например, **k** x **j** = -**i.**

|  |
| --- |
| В результате девятичленная сумма упрощается до |
| **a** x **b** = (ax**i** x by**j**) + (ax**i** x bz**k**) + (ay**j** x bx**i**) + (ay**j** x bz**k**) + (az**k** x bx**i**) + (az**k** x by**j**) =  = (ay bz - az by) **i** + (ax by - ay bx) **k** + (az bx - ax bz) **j** |
| или в более наглядной и запоминаемой записи через определитель (детерминант) 3-его порядка: |
| http://www.emomi.com/download/vector_algebra/va.files/x-det.gif. |

**Смешанное произведение [A x B]C**

Рассмотрим два вектора **А** и **B** с углом 𝜃 между ними. Они служат образующими параллелограма. Площадь этого параллелограма равна модулю векторного произведения **|A x B| =** AB sin 𝜃. Вспомните из школьной геометрии, что площадь параллелограма равна произведению основания параллелограма на его высоту. Роль основания на этом рисунке играет длина А вектора **А**, а высота равна B sin http://www.emomi.com/download/vector_algebra/va.files/theta.gif.

  
Теперь рассмотрим тройное смешанное произведение **[A** x **B]** **C** трех векторов **A, B,** **C .** Вектор **[A** x **B]** множится скалярно на **C.** В результате получается скаляр |**A**x**B**| |**C**| coshttp://www.emomi.com/download/vector_algebra/va.files/phi.gif , где **|A x B| =** AB sin http://www.emomi.com/download/vector_algebra/va.files/theta.gif есть плошадь основания параллелепипеда, построенного на векторах **A, B,** **C,** как его образующих, а |**C**| coshttp://www.emomi.com/download/vector_algebra/va.files/phi.gifесть высота параллелепипеда. Таким образом, произведение **[A** x **B]C** дает объем параллелепипеда, построенного на векторах **A, B,C.**   
Заметим также, что произведение **[A** x **B]** **C** можно представить определителем 3-го порядка, первая строка которого содержит компоненты вектора **А,** вторая - компоненты вектора **В,** третья - вектора **С.**   
В физических приложениях вектор **A** x **B** называют вектором площадки, образованной векторами **А** и **В.**

### Формула Лагранжа

Для двойного векторного произведения справедлива формула Лагранжа (*«бац минус цаб»*.),