***Лекция 11***

**ДИНАМИКА ТОЧКИ.**

Динамика является основным разделом механики. В этом разделе изучают законы движения твердого тела под действием приложенных сил. Простейшим объектом динамики является материальная точка, т. е. тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с длиной его траектории. Например, планета Земля может быть принята за материальную точку, если рассматривать её движение вокруг Солнца.

**Еще раз о принципах механики.**

В статике мы уже сформулировали Принципы механики. Сейчас рассмотрим их трактовку и следствия для динамики

**1*.* Принцип инерции Галилея (первый закон Ньютона)*.***

***Существует такая система отсчёта, в которой изолированная материальная точка сохраняет покой, либо равномерное прямолинейное движение (по инерции).***

Изолированная точка - это точка, не взаимодействующая с другими точками. Очевидно, что понятие изолированной точки является абстракцией, найти такую точку невозможно. Однако это принципиальное понятие позволило Галилею понять, что для движения по инерции не требуется действия сил. Ведь до него люди считали, что для движения нужно прикладывать силу (тележку нужно толкать), забывая о силах сопротивления..

Нет экспериментальных доказательств существования инерциальных систем отсчета. Очевидно, это понятие тоже является абстракцией. Однако найдены системы, очень близкие к инерциальным. “Наиболее” инерциальной системой отсчёта может считаться гелиоцентрическая система отсчёта. Её центр в Солнце, а оси направлены на удалённые звёзды.

Будет показано, что система отсчета, связанная с Землёй, не являются инерциальной. Однако погрешность выполнения законов Ньютона на Земле невелика.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**2. Основной принцип (второй закон Ньютона).**

***Ускорение материальной точки пропорционально действующей***

***на нее силе и обратно пропорционально массе точки***

(1)

Здесь m- масса точки, скалярная постоянная величина.

Принцип позволяет отличить инерциальную систему от не инерциальной. Мотоциклист чувствует силу, которая разгоняет его по отношению к стоящему человеку. Человек же не чувствует никакой силы от ускорения по отношению к мотоциклисту. Причина в том, что система отсчета, связанная со стоящим человеком, инерциальна, а система мотоциклиста - нет. Иначе говоря, ускорение мотоциклиста вызвано силой, действующей на колесо, а ускорение стоящего человека вызвано не силой, а только ускорением мотоциклиста.

***Следствие 1:*** *Силу невозможно создать без сопротивления*, а именно массы, которая выражает способность точки сопротивляться изменению ее скорости.

***Следствие 2:*** *При заданной массе сила определяется ускорением.* При малой массе точки величина силы ограничена возможностью создать большое ускорение точки. Невозможно приложить большую силу к пушинке, поскольку это потребует создания очень большого ускорения. Никакая сила не сдвинет тело бесконечной массы. Если ударить палкой по подушке, лежащей на весах, стрелка качнется меньше, чем при ударе без подушки. Причина в ускорении. Подушка уменьшает ускорение палки (большой путь деформирования подушки)- значит, уменьшает силу удара при данной массе палки.

Это единственный количественный закон механики. Он связывает три величины m, **W,** и **F**, выражая, таким образом, одну из них через две другие независимые. Ускорение **W** с размерностью [W] всегда принимают за независимую величину, поскольку оно связывает базовые величины длины и времени.

В зависимости от того, что принимается за вторую независимую величину (m или F), возможны ***два типа размерности механических величин***:

1. Системы, в которых за вторую независимую величину принята масса m размерности [m]. Примером может служить система СИ. В ней [W] = м/сек2, [m] = к*г*, а производная единица силы называется Ньютоном:
2. Системы, в которых за вторую независимую величину принята сила. Примером может служить Техническая система. В ней [W] = м/сек2, [F] = кГс, а производная единица силы называется Технической единицей массы:

[m] = [F]/[w] = ТЕМ = кГс сек2/м

При решении задач все вычисления важно проводить в одной системе единиц. Напомним соотношение между единицами сил в двух системах.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**3. Принцип равенства действия и противодействия.**

***Две точки взаимодействуют с равными по модулю, противоположно направленными силами.*** Эти силы уравновешены только для точек одного и того же твердого тела.



**4. Принцип внешней аддитивности (правило сложения****сил)**

***Воздействие среды на точку можно заменить одной силой F, равной сумме сил, с которыми точки среды действуют на изучаемую точку***.

В отличие от статики, ***силы в динамике*** могут быть функциями положения точки (ее радиуса - вектора **r**), скорости и независимой переменной- времени .

Рассмотрим, например, силы, действующие на ракету (Рис.2): сила тяжести зависит от расстояния до Земли сила тяги двигателя есть функция времени сила сопротивления воздуха зависит от скорости ракеты и плотности атмосферы (расстояния до Земли)

**Дифференциальные уравнения движения точки.**

**Прямая и обратная задачи динамики точки.**

Запишем второй закон Ньютона с учетом того, что ускорение точки есть вторая производная от радиуса - вектора по времени

(4)

Выражение, связывающее обыкновенные производные искомой функции независимой переменной называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Порядок высшей производной называется порядком дифференциального уравнения. Уравнение (4) является векторным дифференциальным уравнением второго порядка.

Для решения задач уравнение (4) нужно записать в скалярном виде, то есть в проекциях на оси координат. Проектируя (4) на декартовы оси, находим дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах:

Эта система дифференциальных уравнений имеет шестой порядок.

Уравнение (4) в проекциях на оси τ, n, b дает три дифференциальных уравнения в естественных осях.

Здесь учтено, что проекция ускорения на бинормаль b равна нулю.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Прямая и обратная задачи динамики точки.**

Дифференциальные уравнения, например в декартовых координатах (5), допускают постановку двух типов задач динамики точки:

1. ***Прямая задача динамики точки*** состоит в определение равнодействующей сил, приложенных к точке, по заданному закону ее движения. Пусть задан закон движения точки в декартовых координатах.

Нужно найти равнодействующую R(t) .

Решение этой задачи связано с дифференцированием закона движения. Проекции и модуль равнодействующей сил находим по формулам:

(7)

***Пример прямой задачи:***

Найти реакцию N моста радиуса на автомобиль массы движущийся со скоростью в верхней точке моста (Рис.3). Поскольку траектория движения известна, нужно воспользоваться уравнениями в естественных осях:



В проекции на нормаль

Значит

1. ***Обратная задача динамики точки***  является основной и состоит в определении закона движения точки по заданным функциям сил.

В этом случае, уравнения (5) являются системой дифференциальных уравнений для нахождения трех неизвестных функций времени t

Решение обратной задачи связано с интегрированием системы (5) шестого порядка.

При интегрировании возникают шесть постоянных и решение (второй интеграл уравнений) будет иметь вид:

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Наличие постоянных интегрирования указывает на то, что система (5) имеет множество решений. Это значит, что силы не однозначно определяют движение точки. Иначе говоря, одна и та же сила вызывает разные траектории движения точки.

Например, движение камня под действием одной и той же силы тяжести может происходить по разным траекториям в зависимости от того как его бросить (Рис.4). Произвольные постоянные интегрирования определяются из начальных условий движения.



(10)

Чтобы определить постоянные интегрирования нужно подставить эти условия в решение (9) и его производную (первый интеграл уравнений)

=

= (12)

=

Получим алгебраическую систему относительно постоянных C1,...C6 которая имеет единственное решение.

Зависимость траектории точки от начальных условий демонстрируют анимации

<http://web.ncf.ca/ch865/frenchdescr/Projectile2.html>

<http://www.youtube.com/watch?v=N0H-rv9XFHk>

<http://www.youtube.com/watch?v=z24_ihikEqQ>

<http://www.youtube.com/watch?v=ZBfy-MNgtoY>